4　関数とグラフ

25

$y=x^2+2x$ 上の点を $(X,\ Y)$，$(X,\ Y)$ を y 軸に関して対称移動した点を $(x,\ y)$ とすると，
$(x,\ y)=(-X,\ Y)$ より，$(X,\ Y)=(-x,\ y)$
また，$(X,\ Y)$ は $Y=X^2+2X$ を満たす。
よって，$y=x^2+2x$ を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $y=(-x)^2+2(-x)$
すなわち $y=x^2-2x$
$y=x^2-2x$ 上の点を $(X,\ Y)$，$(X,\ Y)$ を x 軸方向に -4，y 軸方向に 4 だけ平行移動した点を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)=(X-4,\ Y+4)$ より，$(X,\ Y)=(x+4,\ y-4)$
また，$(X,\ Y)$ は $Y=X^2-2X$ を満たす。
よって，$y=x^2-2x$ を x 軸方向に -4，y 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線の方程式は
$y-4=(x+4)^2-2(x+4)$　すなわち $y=x^2+6x+12$
ゆえに，放物線 C_1 の方程式は $y=x^2+6x+12$　・・・①
同様にして，放物線 C_2 の方程式は $y=-x^2-2x+p$
したがって，C_1 と C_2 が接するとき，$x^2+6x+12=-x^2-2x+p$
すなわち $2x^2+8x+12-p=0$　は重解をもつ。
よって，判別式を D とすると，$D=0$
これと，$\dfrac{D}{4}=-8+2p$ より，$-8+2p=0$　$\therefore p=4$　・・・(答)
また，このときのこの重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=-4$　$\therefore \alpha=-2$
これを①に代入し，接点の y 座標を求めると，$y=4$
よって，接点の座標は $(-2,\ 4)$

26

条件より，
$a^3+ab+c=b$　・・・①
$ab^2+b^2+c=c$　すなわち $b^2(a+1)=0$　・・・②
$ac^2+bc+c=a$　・・・③
②および $b\neq 0$ より，$a=-1$　・・・④
これを①と③に代入し，それぞれの式を整理すると
$c=2b+1$　・・・⑤　　$c(c-b-1)-1=0$　・・・⑥
⑤を⑥に代入し，整理すると，$2b^2+b-1=0$　すなわち $(2b-1)(b+1)=0$
これと，条件より $a\ b,\ c$ は相異なる定数であることおよび④より，$b=\dfrac{1}{2}$
よって，⑤より，$c=2$
ゆえに，$(a,\ b,\ c)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$

27

$y=f(x)=ax^2-(a+2)x-1$ とすると，

$f(0)=-1<0$ だから，$-1<\alpha<0,\ 2<\beta<3$ を満たすためには，

中間値の定理により，$f(-1)=2a+1>0$，$f(2)=2a-5<0$，$f(3)=6a-7>0$　$\therefore \dfrac{7}{6}<a<\dfrac{5}{2}$

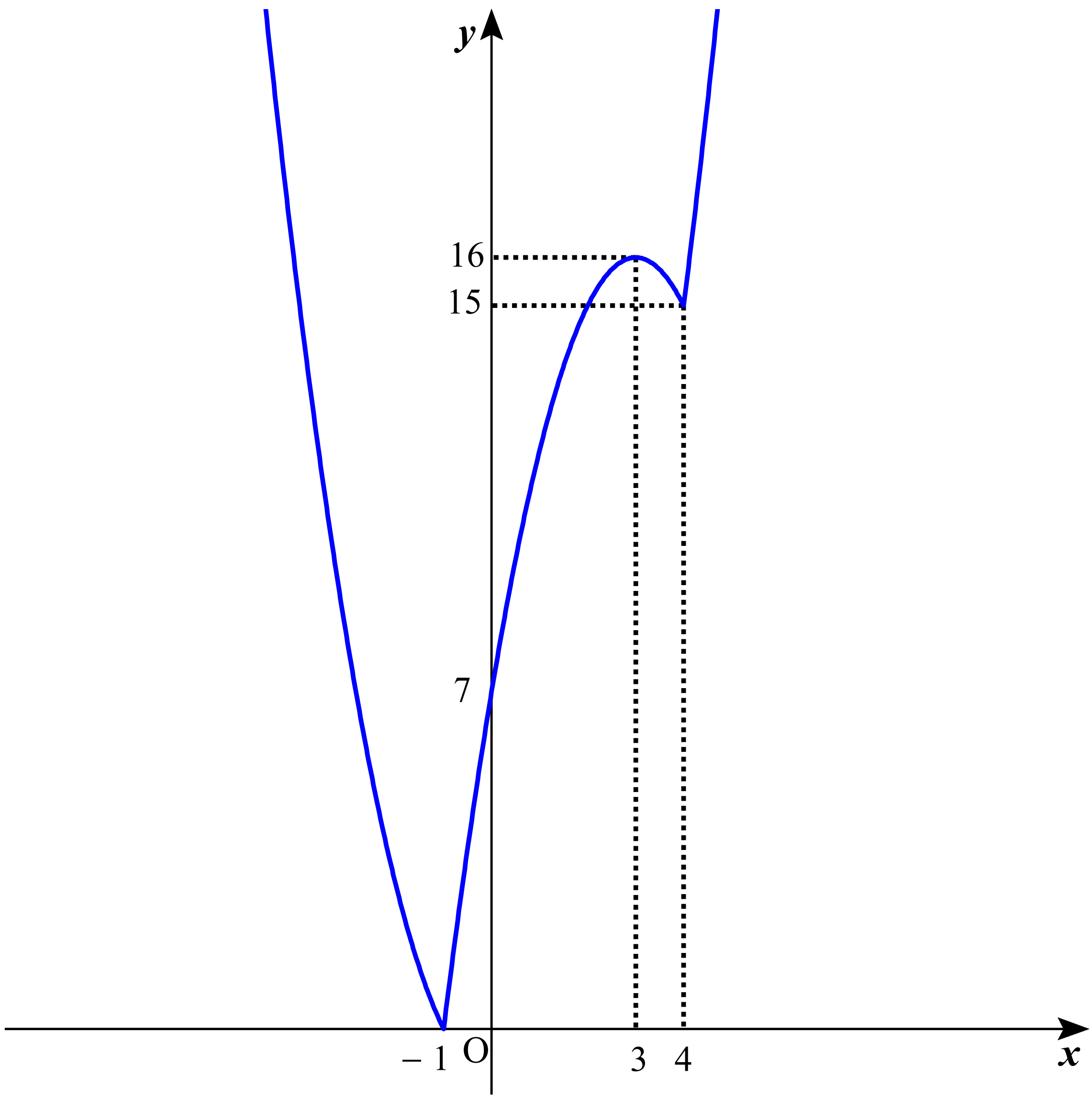
a は整数だから，$a=2$

28

(1)

$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$ より，

$$y=\left|x^2-3x-4\right|+3x+3=\begin{cases}-x^2+6x+7 & (-1\leq x\leq 4)\\ x^2-1 & (x<-1,\ 4<x)\end{cases}$$



(2)

$y=-x^2+6x+7\ (-1\leq x\leq 4)$ と $y=a(x-4)+15$ の共有点の個数

$-x^2+6x+7=a(x-4)+15$ より，$(x-4)\{x+(a-2)\}=0$

よって，1 つの共有点の x 座標は 4

また，x 座標が 4 以外の共有点をもつのは，$-1\leq -(a-2)<4$ のとき

すなわち $-2<a\leq 3$ のときである。

よって，共有点の個数は

$a\leq -2$ のとき 1，$-2<a\leq 3$ のとき 2，$3<a$ のとき 1

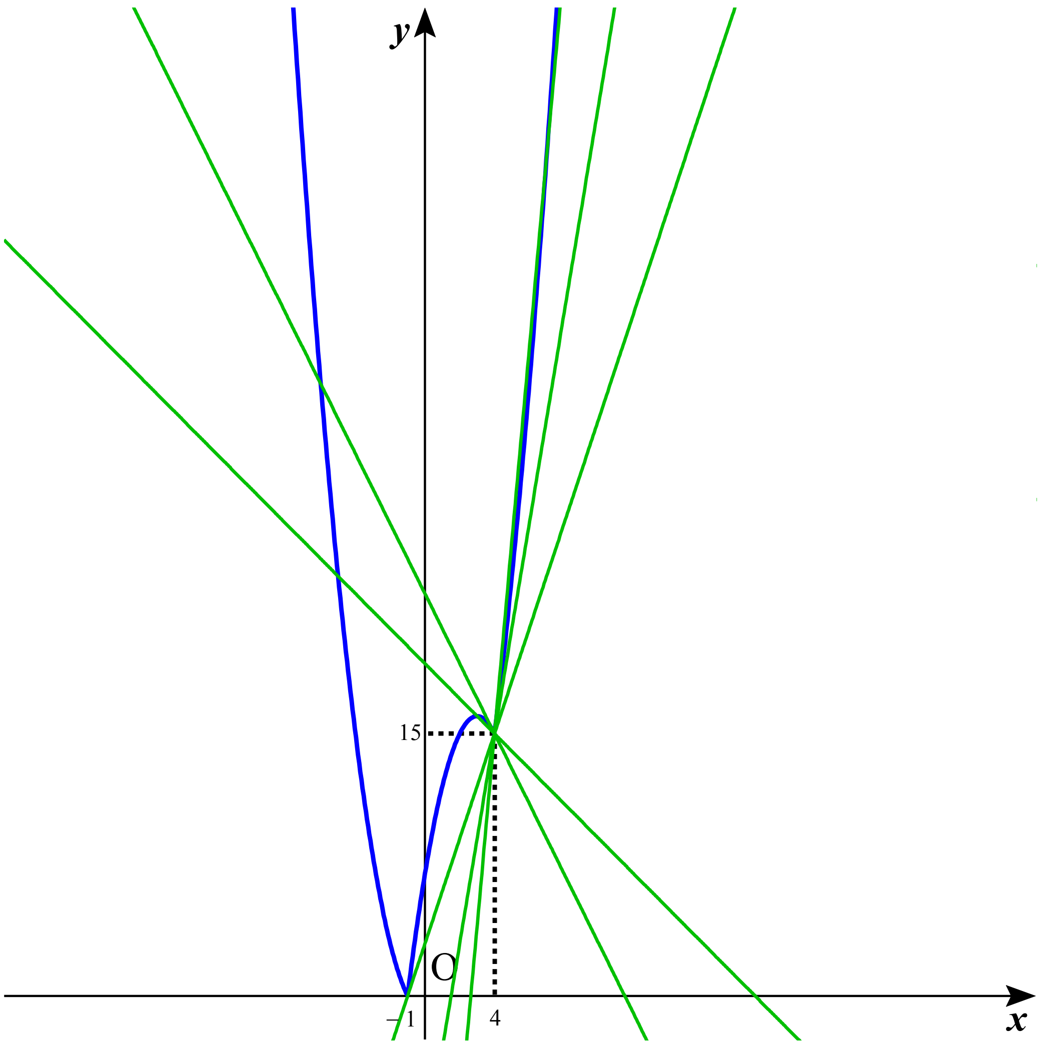
$y=x^2-1\ (x<-1,\ 4<x)$ と $y=a(x-4)+15$ の共有点の個数

$x^2-1=a(x-4)+15$ より，$(x-1)\{x-(a-4)\}=0$

よって，$a-4<-1$ または $4<a-4$ すなわち $a<3$ または $8<a$ のとき 1 つの共有点をもつ。

以上より，共有点の個数は，

$a\leq -2$ のとき 2，$-2<a<3$ のとき 3，$a=3$ のとき 2，$3<a\leq 8$ のとき 1，$8<a$ のとき 2



29

(1)

$0 \leq x < 1$ のとき

$[x] = 0$ より，$y = 0$

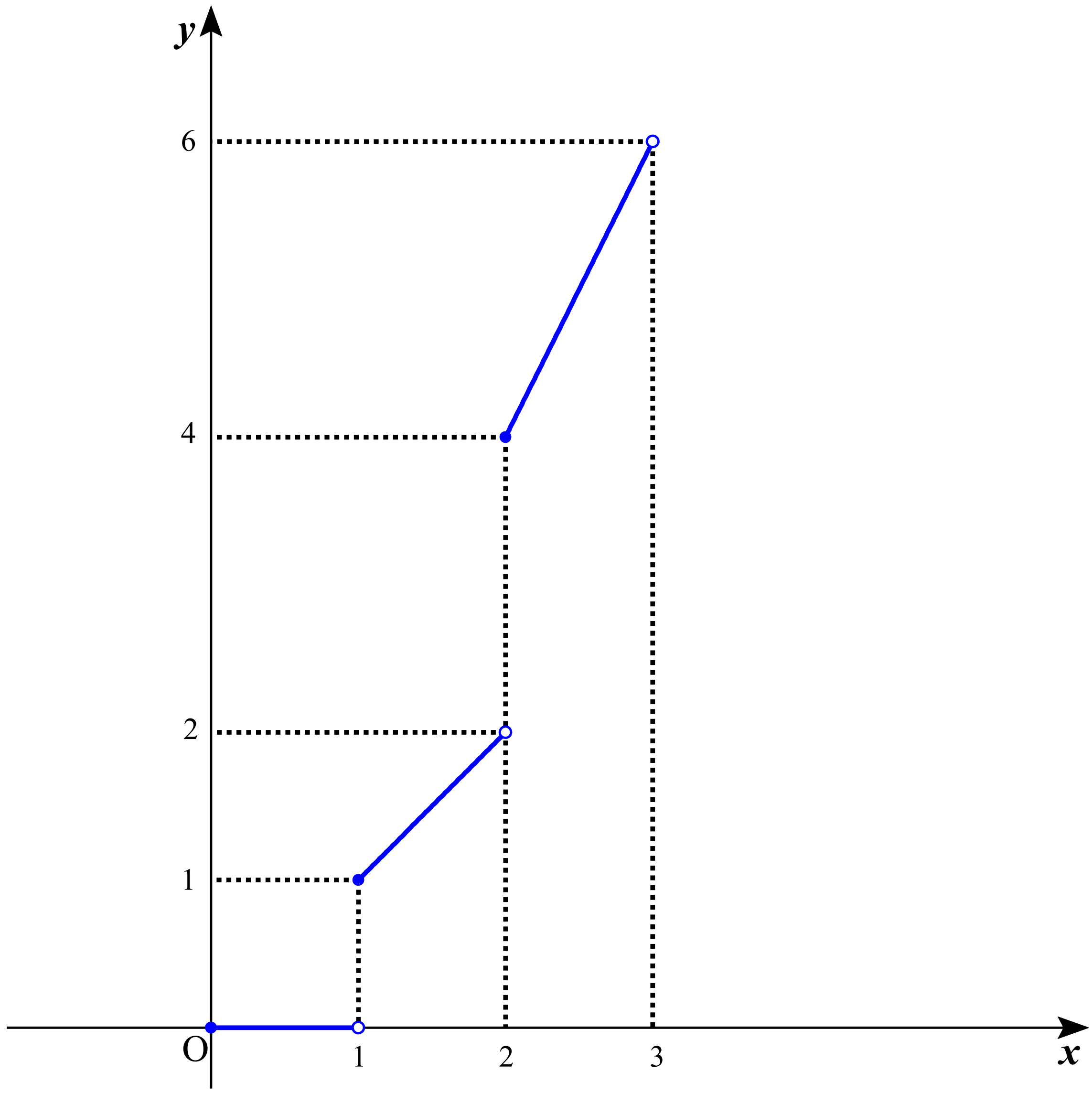
$1 \leq x < 2$ のとき

$[x] = 1$ より，$y = x$

$2 \leq x < 3$ のとき

$[x] = 2$ より，$y = 2x$

よって，グラフは下図のようになる。



(2)

a は正の定数だから，$y=ax^2+\frac{5}{2}\geq\frac{5}{2}$

よって，共有点の y 座標は $\frac{5}{2}$ 以上の値をとる。

したがって，$y=ax^2+\frac{5}{2}$ が $y=2x\ (2\leq x<3)$ と相異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めればよい。

$y=ax^2+\frac{5}{2}$ が $y=2x\ (2\leq x<3)$ と相異なる 2 つの共有点をもつことと

$ax^2+\frac{5}{2}=2x$ が $2\leq x<3$ の範囲で異なる 2 実数解をもつことは同値であり，

さらに，これと $f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$ が $2\leq x<3$ の範囲で x 軸と異なる 2 つの共有点をもつことは同値である。

そこで，$f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$ が $2\leq x<3$ の範囲で x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めることにする。

$$f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$$
$$=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+\frac{5}{2}$$

より，

軸 $x=\frac{1}{a}$ の範囲について満たすべき条件は $2<\frac{1}{a}<3$ すなわち $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ ・・・①

頂点の y 座標について満たすべき条件は $-\frac{1}{a}+\frac{5}{2}<0$ すなわち $a<\frac{2}{5}$ ・・・②

また，中間値の定理より $f(2)=4a-\frac{3}{2}\geq 0$ かつ $f(3)=9a-\frac{7}{2}>0$ すなわち $a>\frac{7}{18}$ ・・・③

よって，①かつ②かつ③より，$\frac{7}{18}<a<\frac{2}{5}$

逆に $\frac{7}{18}<a<\frac{2}{5}$ ならば $f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$ が $2\leq x<3$ の範囲で x 軸と異なる 2 つの共有点をもつ。

ゆえに，$\frac{7}{18}<a<\frac{2}{5}$

30

線分 L の方程式は $y=2x\ (0\leq x\leq 1)$ だから，$y=x^2+ax+b$ と線分 L が共有点をもつことと $x^2+ax+b=2x$ すなわち $x^2+(a-2)x+b=0$ が $0\leq x\leq 1$ において少なくとも 1 つの解をもつことは同値である。

したがって，$f(x)=x^2+(a-2)x+b$ とおくと，$y=f(x)$ が $0\leq x\leq 1$ において x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示すればよい。

$f(x)$ と x 軸との共有点の存在のしかたについては以下のように分類できる。

$f(0)f(1)>0$ のとき

・x 軸と共有点をもたない。

・共有点は $0<x<1$ にのみ存在する。

・共有点は $x<0$ （または $1<x$ ）にのみ存在する。

$f(0)f(1)=0$ のとき

1 つの共有点は $x=0$ または $x=1$ である。

$f(0)f(1)<0$ のとき

共有点は 2 つ存在し, 1 つは $0<x<1$ において, 1 つは $x<0$ または $1<x$ においてである。

よって，$y=f(x)$ が $0\leq x\leq 1$ において x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつことは $y=f(x)$ と x 軸との共有点が $0<x<1$ にのみ存在するか $f(0)f(1)\leq 0$ となることと同値である。

(i) $y=f(x)$ と x 軸との共有点が $0<x<1$ にのみ存在するとき

放物線は下に凸かつ $f(0)f(1)>0$ より,

$f(0)=b>0$ ・・・① $f(1)=a+b-1>0$ ・・・②

また,

$$f(x)=x^2+(a-2)x+b$$
$$=\left(x+\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2-4b}{4}$$

より,

軸 $x=-\dfrac{a-2}{2}$ について満たすべき条件は $0<-\dfrac{a-2}{2}<1$ $\therefore 0<a<2$ ・・・③

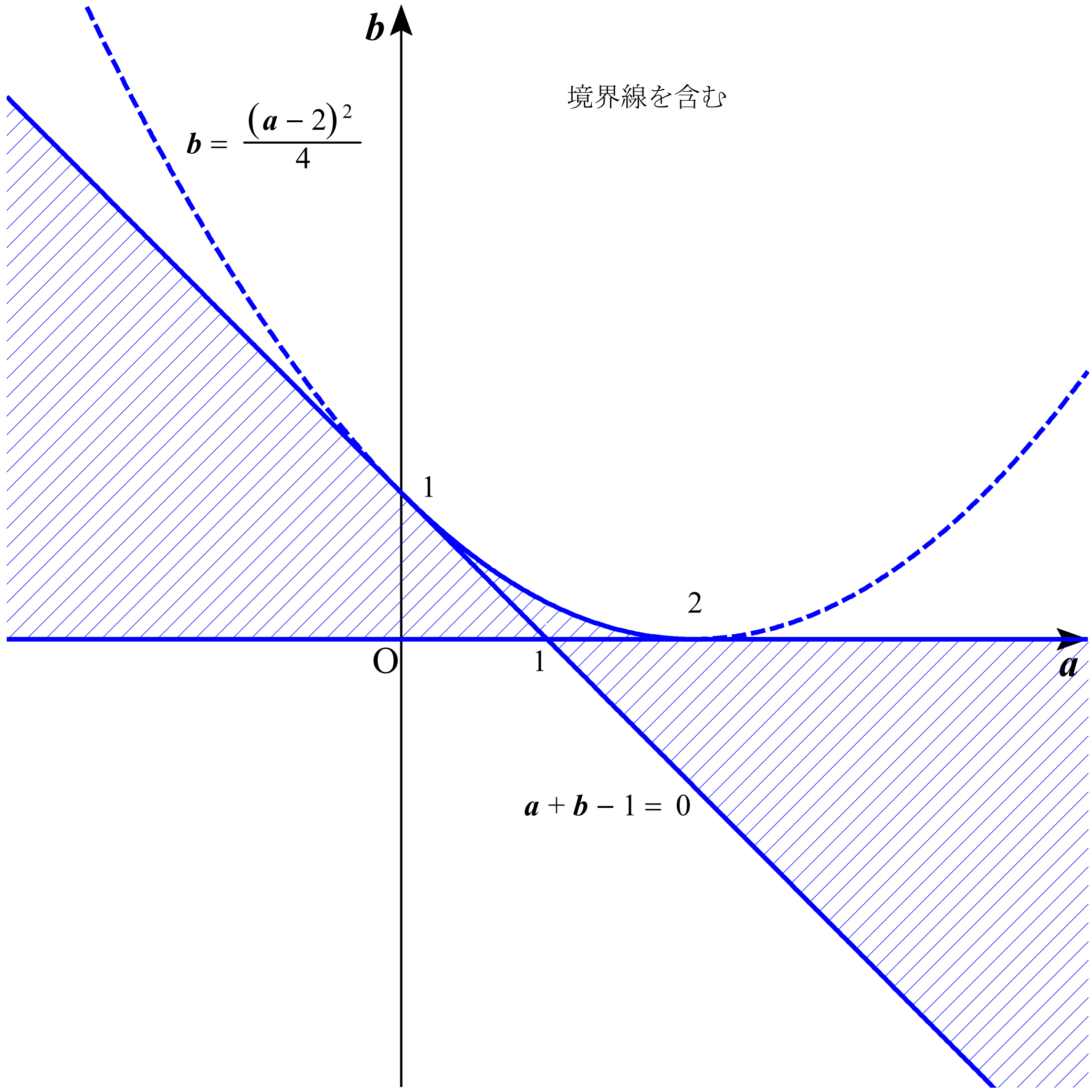
頂点の y 座標について満たすべき条件は $-\dfrac{(a-2)^2-4b}{4}\leq 0$ $\therefore b\leq\dfrac{(a-2)^2}{4}$ ・・・④

(ii) $f(0)f(1)\leq 0$ のとき

$f(0)f(1)=b(a+b-1)\leq 0$

よって，$a+b-1\geq 0$ （$b\leq 0$）または $a+b-1\leq 0$ （$b\geq 0$） ・・・⑤

(i)または(ii)であればよいから,（①かつ②かつ③かつ④）または⑤を満たす実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示すればよい。



b
境界線を含む
$b = \dfrac{(a-2)^2}{4}$
1
2
O
1
a
$a + b - 1 = 0$

31

(1)

直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{-4-12}{2-(-2)}(x-2)-4$ より，$y=-4x+4$

よって，直線 PQ と x 軸すなわち $y=0$ の共有点の x 座標は，$0=-4x+4$ より，$x=1$

(2)

$k=-4$ のとき

$y=x^2-4x$ と $y=-4(x-a)$ の共有点の x 座標は $x^2-4x=-4(x-a)$

すなわち $x^2=4a$ の解である。

したがって，$-2\le x\le 2$ の範囲で共有点をもつとき，$0\le x^2\le 4$ より，$0\le a\le 1$

よって，題意が成り立つためには $0\le a\le 1$ であることが必要である。

逆に，

$a=0$ のとき

共有点の x 座標は $x^2-4x=kx$ すなわち $x\{x-(k+4)\}=0$ の解である。

したがって，任意の k の値に対して，$x=0$ を解にもつ。

よって，$a=0$ は題意を満たす。

$a=1$ のとき

共有点の x 座標は $x^2-4x=k(x-1)$ すなわち $x^2-(k+4)x+k=0$ の解である。

$k=-4$ のとき

$x^2-4=0$ より，$x=\pm 2$ を解にもつ。

$k\ne -4$ のとき

$y=f(x)=x^2-(k+4)x+k$ とすると，

$$\begin{aligned} f(-2)f(2)&=(3k+12)(-k-4)\\ &=-3(k+4)^2<0 \end{aligned}$$

より，$y=f(x)$ は x 軸と $-2<x<2$ の範囲で交わる。

よって，$a=1$ は題意を満たす。

$0<a<1$ のとき

$y=x^2-4x$ と $y=k(x-a)$ のグラフより，

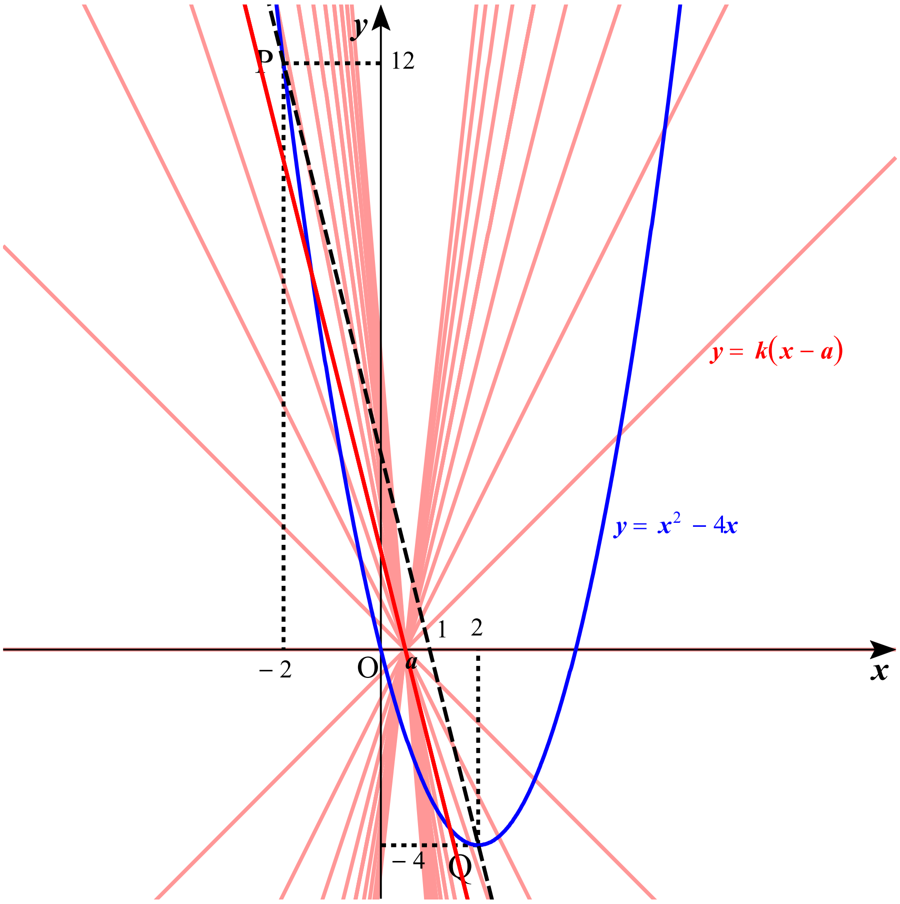
$k\le -4$ のとき $a<x<2$ において共有点が必ず存在する。

$-4<k$ のとき $-2<x<a$ において共有点が必ず存在する。

よって，a の値の範囲が $0<a<1$ のとき題意を満たす。

以上より，$0\le a\le 1$ のとき，逆も成り立つ。

ゆえに，求める a の値の範囲は $0\le a\le 1$



32

与式より，$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

よって，$y=f(x)$ と $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ のグラフの共有点の x 座標が求める解である。

$y=f(x)$ のグラフの概形について

$$\begin{aligned} f(x+2) &= -f(x+1)+1 \\ &= -\{-f(x)+1\}+1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

より，$y=f(x)$ は周期 2 の関数である。

したがって，$0 \leq x < 2$ における $y=f(x)$ のグラフの概形がわかればよい。

(i) $0 \leq x < 1$ のとき

(A)より，$f(x)=x$

(ii) $1 \leq x < 2$ のとき

$1 \leq x < 2$ より，$0 \leq x-1 < 1$

これと(A)より，$f(x-1)=x-1\ (1 \leq x < 2)$　・・・①

また，(B)より，$f(x)=-f(x-1)+1$（x は任意の実数）　・・・②

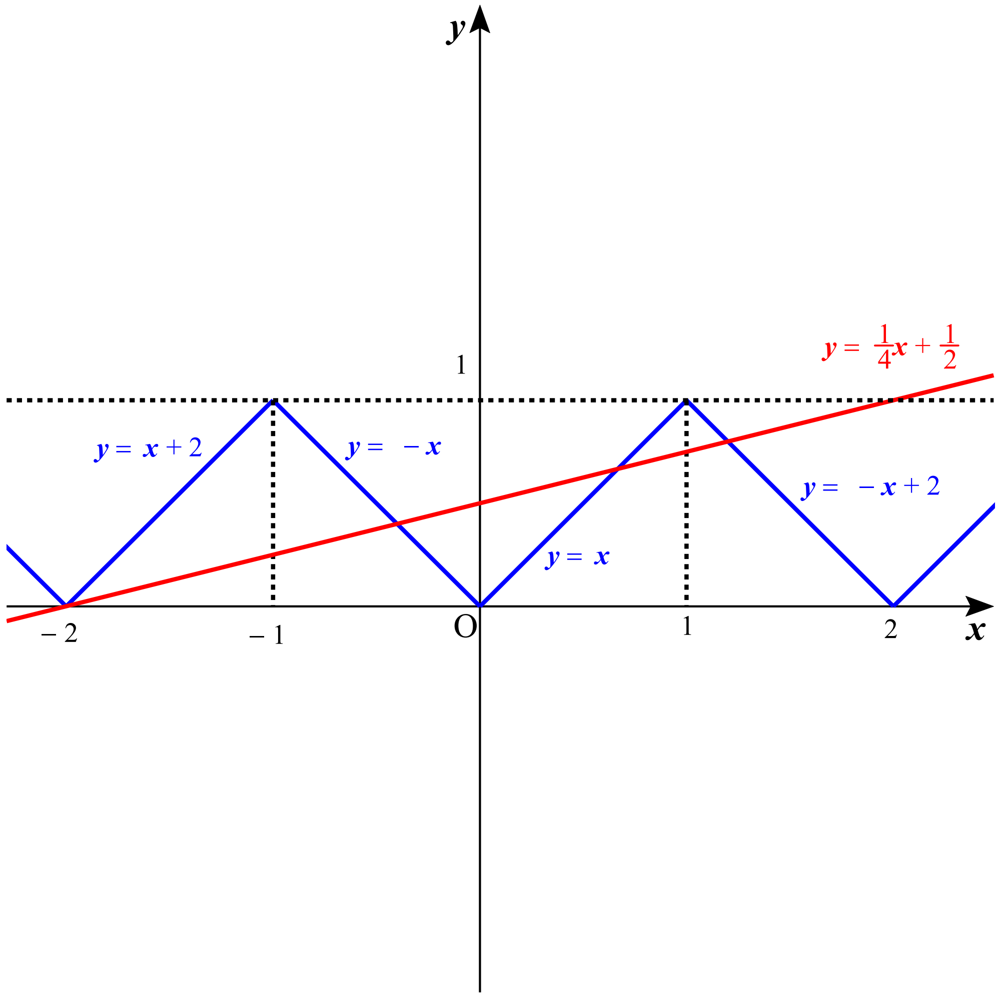
よって，①，②より，

$1 \leq x < 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(x-1)+1 \\ &= -(x-1)+1 \\ &= -x+2 \end{aligned}$$

よって，(i)，(ii)より，$f(x)=\begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ -x+2 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$

以上より，$y=f(x)$ と $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ のグラフをかくと下図のようになる。



よって，$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ が $y=x+2,\ y=-x,\ y=x,\ y=-x+2$ の共有点の x 座標が求める解である。

ゆえに，$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=x+2,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=-x,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=x,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=-x+2$ を解くことにより，

$x=-2,\ -\frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5}$

補足

抽象的な問題に対しては，数値代入，条件を満たす簡単な図形，グラフ，表などで具体化し，規則性を発見することから始める。

問題の場合

$x \geq 0$ のとき

$f(0)=0$

$f(1)=f(0+1)=-f(0)+1=0+1=1$

$f(1.1)=f(0.1+1)=-f(0.1)+1=-0.1+1=0.9$

$f(1.2)=f(0.2+1)=-f(0.2)+1=-0.2+1=0.8$

$\vdots$

$f(2)=f(1+1)=-f(1)+1==-1+1=0$

$f(2.1)=f(1.1+1)=-f(1.1)+1=-0.9+1=0.1$

$f(2.2)=f(1.2+1)=-f(1.2)+1=-0.8+1=0.2$

$\vdots$

$f(3)=f(2+1)=-f(2)+1=0+1=1$

$\vdots$

$x<0$ のとき

$f(0)=f(-1+1)=-f(-1)+1$

これと $f(0)=0$ より， $0=-f(-1)+1 \quad \therefore f(-1)=1$

$f(0.1)=f(-0.9+1)=-f(-0.9)+1$

これと $f(0.1)=0.1$ より， $0.1=-f(-0.9)+1 \quad \therefore f(-0.9)=0.9$

$\vdots$